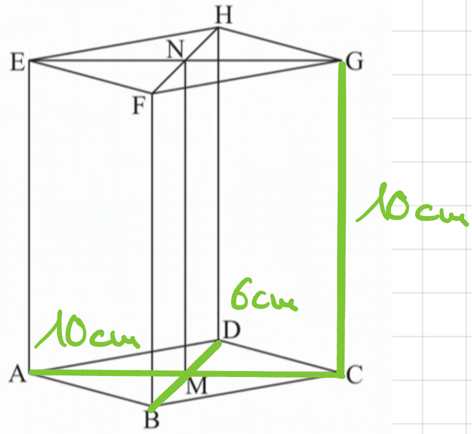
AP MII 2018 HT - B2 - Lösungsmuster

B 2.0 Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild des geraden Prismas ABCDEFGH, dessen Grundfläche die Raute ABCD mit dem Diagonalenschnittpunkt M ist. Die Strecken [EG] und [FH] schneiden sich im Punkt N.

Es gilt: $\overline{AC} = 10$ cm; $\overline{BD} = 6$ cm; $\overline{AE} = 10$ cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

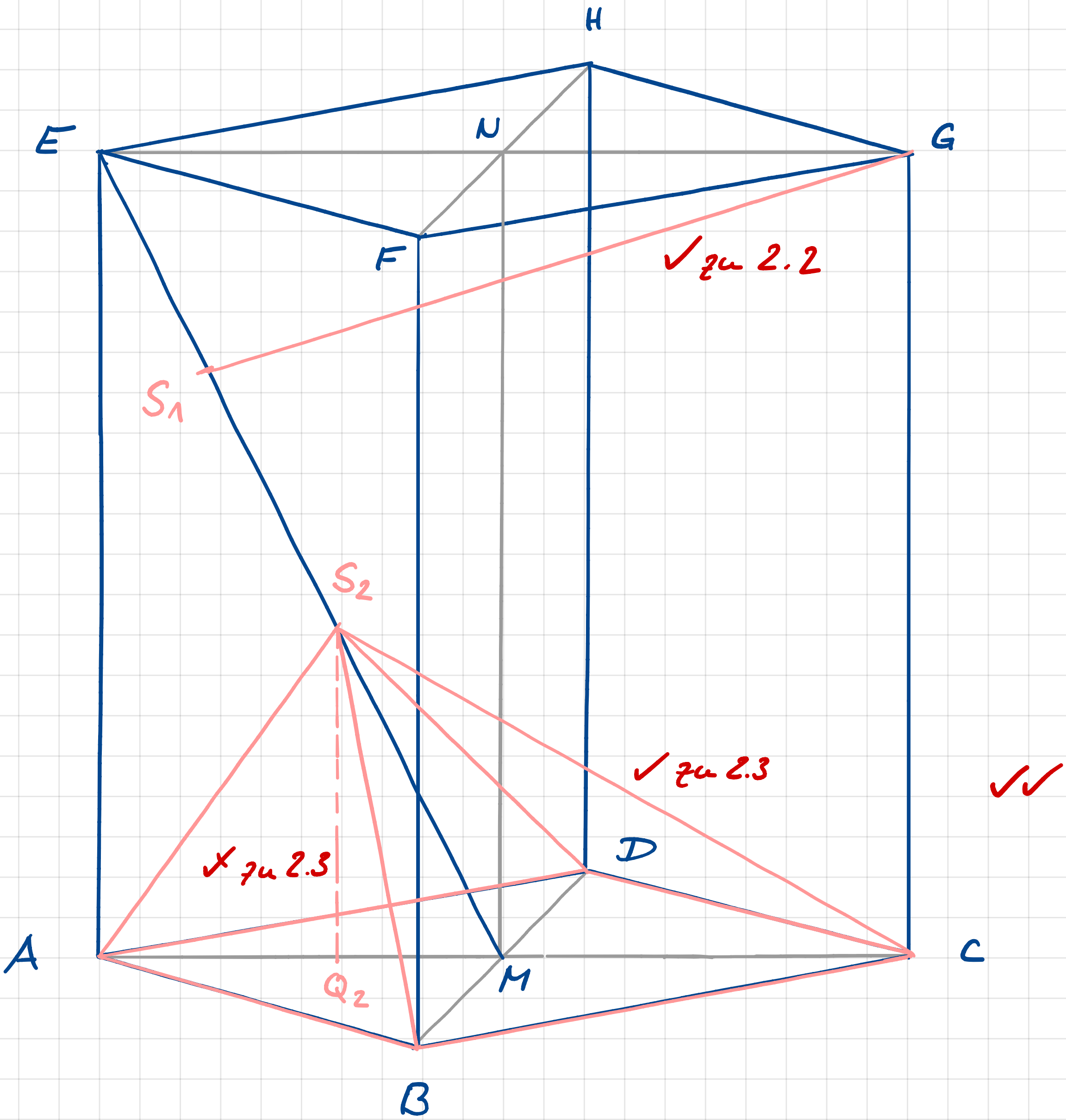


B 2.1 Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas ABCDEFGH, wobei die Strecke [AC] auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.

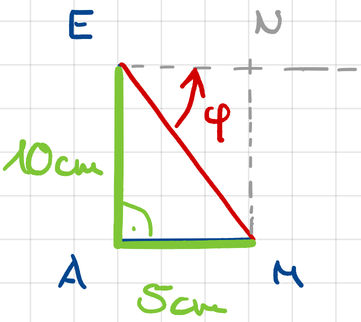
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.

Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke [ME] und das Maß φ des Winkels MEN.

[Ergebnisse: $\overline{ME} = 11{,}18$ cm; $\varphi = 63{,}43°$] 4 P



Betrachte Δ AME (rechtwinklig):



$$\overline{ME} = \sqrt{10^2 + 5^2}\,cm = \underline{\underline{11{,}18\,cm}}$$

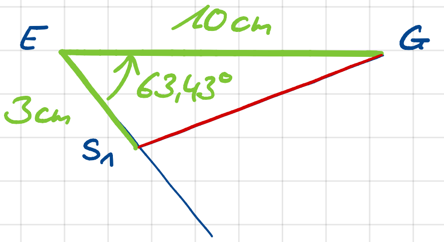
$$\tan\varphi = \frac{10cm}{5cm}\,;\quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{10}{5}\right) = \underline{\underline{63{,}43°}}$$

"bewegliche" Punkte auf [ME]

B 2.2 Punkte S_n liegen auf der Strecke $[ME]$ mit $\overline{ES_n}(x) = x$ cm, $x \in [0;11{,}18[$ und $x \in \mathbb{R}$. Zeichnen Sie das Dreieck S_1GE für $x = 3$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein. Berechnen Sie sodann den Flächeninhalt des Dreiecks S_1GE und die Länge der Strecke $[S_1G]$. 3 P

Einzeichnen des Dreiecks S_1GE für $x = 3cm$

Betrachte ΔS_1GE (nicht rechtwinklig):



$$A_{\Delta S_1GE} = (0{,}5 \cdot 3 \cdot 10 \cdot \sin 63{,}43°)\,cm^2$$
$$= \underline{\underline{13{,}42\,cm^2}}$$

$$\overline{S_1G} = \sqrt{3^2 + 10^2 - 2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot \cos 63{,}43°}\,cm$$
$$= \underline{\underline{9{,}06\,cm}}$$

B 2.3 Die Punkte S_n sind Spitzen von Pyramiden $ABCDS_n$ mit der Grundfläche ABCD und den Höhen $[Q_nS_n]$. Dabei liegen die Punkte Q_n auf der Strecke $[AM]$.

Zeichnen Sie die Pyramide $ABCDS_2$ sowie ihre Höhe $[Q_2S_2]$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein. Dabei gilt: $\sphericalangle MAS_2 = 54°$.

Zeigen Sie, dass für das Volumen V der Pyramiden $ABCDS_n$ in Abhängigkeit von x gilt: $V(x) = (100 - 8{,}9x)\,cm^3$.

$[\text{Teilergebnis: } \overline{Q_nS_n}(x) = (10 - 0{,}89x)\,cm]$ 4 P

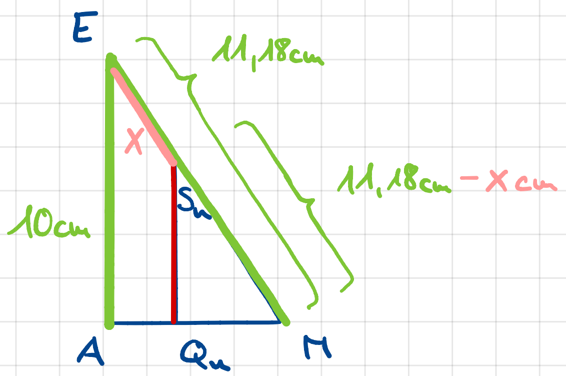
Einzeichnen der Pyramide $ABCDS_2$ und der Höhe $[Q_2S_2]$. ✗

Volumen V(x) der Pyramiden $ABCDS_n$:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h \qquad \text{mit} \quad A_G = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10cm \cdot 6cm \cdot \overline{S_nQ_n}$$

Höhe $\overline{S_nQ_n}$: Betrachte ΔAME (Vierstreckensatz):



$$\frac{\overline{S_nQ_n}}{10\,cm} = \frac{(11{,}18 - x)\,\cancel{cm}}{11{,}18\,\cancel{cm}} \quad | \cdot 10\,cm$$

$$\overline{S_nQ_n} = \frac{(11{,}18 - x) \cdot 10}{11{,}18}\,cm$$

$$\overline{S_nQ_n} = (11{,}18 - x) \cdot 0{,}89\,cm$$

$$= (9{,}95 - 0{,}89x)\,cm$$ ✓✗

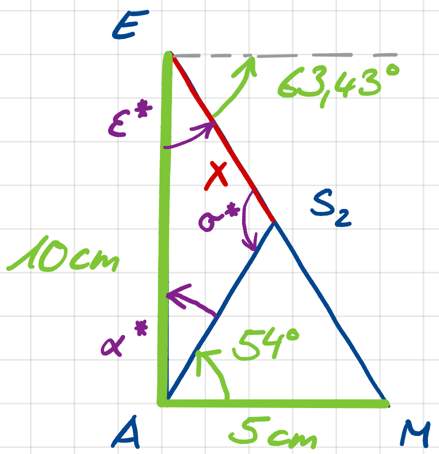
Abweichung kommt durch Runden zustande

$$\Rightarrow V(x) = \cancel{\frac{1}{3}} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cdot 10cm \cdot \cancel{6}cm \cdot (10 - 0{,}89x)\,cm$$

$$= \underline{\underline{(100 - 8{,}9x)\,cm^3}}$$ ✓

B 2.4 Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCDS_2$. 4 P

Idee: das zugehörige x für die Pyramide $ABCDS_2$ berechnen und dann in $V(x)$ einsetzen



Betrachte ΔAS_2E (nicht rechtwinklig):

- $\varepsilon^* = 90° - 63,43° = 26,57°$ ✓
  $\alpha^* = 90° - 54° = 36°$ ✓
  $\sigma^* = 180° - 26,57° - 36° = 117,43°$ ✓

- $$\frac{x\,\cancel{cm}}{\sin 36°} = \frac{10\,\cancel{cm}}{\sin 117,43°} \quad \checkmark \quad | \cdot \sin 36°$$
  $$x = \frac{10}{\sin 117,43°} \cdot \sin 36° = 6,62 \quad \checkmark$$

- $$V(x=6,62) = (100 - 8,9 \cdot 6,62)\,cm^3 = \underline{\underline{41,08\,cm^3}} \quad \checkmark$$

B 2.5 Begründen Sie, dass es keine Pyramide $ABCDS_n$ gibt, deren Volumen halb so groß wie das Volumen des Prismas ABCDEFGH ist. 2 P

- $V_{Prisma} = A_G \cdot h \quad$ mit $A_G = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot 10 \text{ cm}^3 = 300 \text{ cm}^3 \checkmark$$

- $$V(x) = \frac{1}{2} \cdot V_{Prisma}$$

$$(100 - 8{,}9x)\cancel{\text{cm}^3} = \frac{1}{2} \cdot 300 \cancel{\text{cm}^3}$$

$$100 - 8{,}9x = 150 \qquad | -150 + 8{,}9$$

$$-50 = 8{,}9x \qquad | : 8{,}9$$

$$x = -5{,}62 \;\lightning \qquad x \in [0; 11{,}18[$$

A: Eine Pyramide mit einem Volumen von 150 cm^3 existiert nicht. ✓

Alternative Begründung (ohne Rechnung):

- $V(x) = (100 - 8{,}9x) \text{ cm}^3$

$\Rightarrow$ V_{max} der Pyramiden ist 100 cm^3

$\Rightarrow$ Eine Pyramide mit einem Volumen von 150 cm^3 existiert nicht.